

بہ نام خدا



مدیریت پژوهش، توسعه و مطالعات اسلامی

# معرفی اندازہ های ریسک سیستمی (۱)

زانبار احمدی

## فهرست مطالب

|    |                                    |
|----|------------------------------------|
| ۲  | مقدمه                              |
| ۵  | اندازه‌های ریسک سیستمی             |
| ۵  | روش‌شناسی                          |
| ۵  | $MES$ و $SES$                      |
| ۶  | $SRISK$                            |
| ۷  | $\Delta CoVaR$                     |
| ۷  | اندازه‌های ریسک در چارچوب مدل گارچ |
| ۹  | کاربرد اندازه‌ها در عمل            |
| ۱۰ | مورد اول:                          |
| ۱۵ | مورد دوم:                          |
| ۲۰ | منابع:                             |

## چکیده

ریسک سیستمی احتمال سقوط کل سیستم مالی را بیان می‌کند. در اکثر موارد، سرمایه‌گذاران نگران از دست دادن ارزش یک سهم و یا کالا هستند در حالیکه در ریسک سیستمی، تمرکز روی کل بازار است. این سقوط اغلب زمانی رخ می‌دهد که یک شرکت کلیدی در کل سیستم شروع به ورشکستگی می‌کند، ترس حاصل شده موج‌وار روی سایر شرکت‌ها اثر منفی می‌گذارد و آنها نیز دچار افت می‌شوند. این واکنش‌های زنجیره‌ای باعث می‌شود بازار دچار استرس شود و در معرض بحران قرار گیرد.

انگیزه این گزارش مروری بر تاریخچه مدلسازی ریسک سیستمیک و معرفی چند مدل خاص و پرکاربرد در اندازه‌گیری ریسک کل سیستم است. کلاً می‌توان اندازه‌های ریسک سیستمی را به دو نوع تقسیم‌بندی کرد؛ نوع اول، اندازه‌هایی که ریسک کل سیستم را در حالتی که یک نهاد کلیدی در معرض خطر قرار گرفته است مورد سنجش قرار می‌دهند و نوع دوم، اندازه‌هایی هستند که ریسک یک نهاد را در هنگامی که کل سیستم در بحران قرار دارند محاسبه می‌کنند.

**کلمات کلیدی:** ریسک سیستمی، ارزش در معرض خطر شرطی، اندازه ریسک سیستمی

## مقدمه

چنانچه شرکتی کلیدی در یک صنعت خاص دچار شکست شود، باعث می‌شود آن صنعت نیز دچار بحران شود. سرمایه‌گذاران با دیدن این که یکی از شرکت‌های داخل مجموعه دچار بحران شده است، به منظور کاهش ضرر تلاش خواهند کرد تا با فروش سهام شرکت‌های مشابه، سرمایه خود را حفظ کنند. سرمایه‌گذاران راهی برای فرار از ریسک سیستمی ندارند، تنها باید با آن کنار بیایند. حتی سبدهای با تنوع بالا نیز دچار ریسک متناظر با سقوط کل بازار می‌شوند.

بحران مالی اخیر باعث شد تحقیقات گسترده‌ای در زمینه ریسک سیستمی، چه در زمینه تعریف و چه در زمینه اندازه‌گیری و کنترل آن به عمل آید. به طور خاص، توجه بیشتر این تحقیقات، شناسایی نهادهای مالی است که در بروز ریسک سیستمی سهم بیشتری داشته‌اند. این نهادها، نهادهای مالی مهم سیستمی (SIFI)<sup>1</sup> خوانده می‌شوند. انجمن ثبات مالی<sup>2</sup>، SIFI را به این صورت تعریف می‌کند: "نهادهای مالی که به علت اندازه، پیچیدگی و ارتباطات متقابل سیستمی دچار آشفتگی شده و در معرض خطر قرار گرفته‌اند، باعث وقفه و شکست در کل سیستم مالی و فعالیت‌های اقتصادی می‌شوند". زمانی که این نهادها تهدیدی جدی برای سیستم به شمار آیند، ناظران و سیاست‌گذاران در سرتاسر جهان خواستار اعمال نظارت‌های سخت‌گیرانه، الزامات سرمایه مورد نیاز اضافی و محدودیت‌های نقدینگی برای این نهادها شده‌اند.

<sup>1</sup> Systemically Important Financial Institution (SIFI)

<sup>2</sup> Financial Stability Board

بحران مالی اخیر، شکنندگی سیستم مالی و ریسک سیستمی را به عموم نشان داده است. ارزش در معرض خطر<sup>۳</sup> (VaR) که مسلماً پر استفاده‌ترین اندازه ریسک توسط نهادهای مالی بوده است، به علت عدم توانایی و ظرفیت برای نشان دادن ریسک سیستمی به نقد کشیده شده است؛ زیرا فقط می‌تواند ریسک یک نهاد منحصر را اندازه‌گیری کند. ناظران بازار از VaR به عنوان ابزاری برای تعیین سطح سرمایه لازم برای مقابله با ریسک بازار استفاده می‌کردند. از آنجاییکه VaR فقط ریسکی را در نظر می‌گیرد که یک نهاد با آن مواجه است، قادر نیست ریسک سیستمی حاصل از VaR نهاد مالی را اندازه بگیرد. به همین دلیل، اخیراً تلاش‌هایی برای معرفی اندازه ریسک جایگزین که کمبودهای VaR را نداشته باشد صورت گرفته است.

در عمل دو رویکرد برای اندازه‌گیری میزان سهم یک نهاد مالی از ریسک کل سیستم وجود دارد. رویکرد اول به اطلاعات وضعیت مالی شرکت و در معرض ریسک بودن آن بستگی دارد. این اطلاعات محرمانه توسط بنگاه‌های مالی برای ناظران تهیه می‌شود. رویکرد دوم تنها بر پایه داده‌های منتشر شده بازار مانند بازده سهام، قیمت قراردادهای اختیار یا دامنک‌های تاخت‌های نکول اعتباری<sup>۴</sup> (CDS) است. چهار مثال برجسته از مقیاس‌های پیشنهاد شده برای اندازه‌گیری ریسک سیستمی عبارتند از: زیان مورد انتظار حاشیه‌ای<sup>۵</sup> (MES)، زیان مورد انتظار سیستمی<sup>۶</sup> (SES)، اندازه ریسک سیستمی<sup>۷</sup> (SRISK) و دلتا ارزش در معرض خطر شرطی<sup>۸</sup> ( $\Delta CoVaR$ ) است. از سری کارهای صورت گرفته در موضوع بحران مالی تعداد اندکی هستند که هم در دانشگاه و هم در مجامع نظارتی مورد استقبال گرفته باشد. تا قبل از چهار یا پنج سال گذشته صدها مقاله در زمینه آزمون، پیاده‌سازی و تعمیم اندازه‌های ریسک سیستمی صورت گرفته است. به علاوه، نظر ناظران و بانک‌های مرکزی این است که این اندازه‌ها در حال حاضر برای نشان دادن شرکت‌های مهم سیستمی به کار برده می‌شوند.

یکی از کارهای انجام شده در همین زمینه به مطالعه آدریان و برونرمر [۷] برمی‌گردد که اندازه ریسک جدید به اسم ارزش در معرض خطر شرطی یا CoVaR را معرفی کرده‌اند. آنها  $CoVaR^{i|j}$  را به صورت VaR نهاد  $i$  به این شرط که نهاد  $j$  در معرض خطر بحران مالی باشد تعریف کردند، یعنی نهاد  $j$  در VaR متناظر خود قرار گرفته باشد. آدریان و برونرمر با قرار دادن شرط قرار گرفتن در معرض خطر یک نهاد دیگر، یک گام فراتر از ریسک غیرسیستماتیک نهاده و ریسک ممکن پخش شده میان نهادهای مالی را اندازه گرفته‌اند.

<sup>3</sup> Value at Risk (VaR)

<sup>4</sup> Credit Default Swaps (CDSs) spreads

<sup>5</sup> Marginal Expected Shortfall

<sup>6</sup> Systemic Expected Shortfall

<sup>7</sup> Systemic Risk

<sup>8</sup> Delta Conditional Value at Risk

اندازه  $CoVaR^{i|j}$  می‌تواند برای هر دو نهاد مالی  $i$  و  $j$  محاسبه شود؛ ادریان و برونر میر  $i$  را یک سیستم مالی در نظر گرفتند. در این حالت  $CoVaR$ ، ارزش در معرض خطر سیستم مالی به این شرط است که نهاد  $j$  در معرض بحران باشد، بنابراین می‌تواند سهم یک نهاد مالی را در ریسک سیستمی اندازه‌گیری کند.

از میان کارهای دیگر صورت گرفته به منظور کمی‌سازی ریسک سیستمی می‌توان به کارهای زیر اشاره کرد: بیلو و همکاران [۸] که از تحلیل مؤلفه‌ای و آزمون اثر گرنجر، ریسک سیستمی مرتبط میان بازده‌های صندوق‌ها، بانک‌ها، کارگزاران و شرکت‌های بیمه را اندازه‌گیری کرده‌اند. ژاو [۹] با استفاده از نظریه ارزش فرین چندمتغیره دو اندازه ریسک سیستمی تهیه کرد: شاخص اثر سیستمی و شاخص آسیب‌پذیری. اولی ریسکی که یک نهاد بر سیستم مالی اعمال می‌کند را اندازه می‌گیرد و دیگری ریسکی که سیستم بر یک نهاد اعمال می‌کند را اندازه می‌گیرد. هوانگ و همکاران [۱۰] با استفاده از اطلاعات تاخت‌های نکول اعتباری نهادهای مالی و همبستگی بازده سهام ریسک سیستمی را به عنوان قیمت بیمه در مقابل حوادث مالی مدل کردند. سوگویانو و گودهارت [۱۱] نیز با استفاده از اطلاعات CDSها سهم نهاد مالی را در سیستم مالی اندازه گرفتند. آچاریا و همکاران [۲] با استفاده از بازده سهام نهادهای مالی زیان مورد انتظار سیستمی (SES) و زیان مورد انتظار حاشیه‌ای (MES) را اندازه گرفتند. زیان مورد انتظار حاشیه‌ای، میانگین زیان نهاد مالی در موقعی است که سیستم مالی در دُم سمت چپ قرار دارد و زیان مورد انتظار سیستمی میانگین موزون MESهای نهادها و اهرم‌های آنهاست. زمانی که آچاریا در سال ۲۰۱۰ اندازه‌های MES زمان ثابت را محاسبه کردند، براونلس و آنجل [۱۲] سری زمانی خود را با استفاده از مدل گارچ دو متغیره و برآوردهای دُم ناپارامتریک محاسبه کردند. در نهایت، آلن و همکاران [۱۳] یک اندازه از ریسک‌های سیستمی تجمعی به اسم CATFIN پیشنهاد دادند که برخلاف اندازه‌های ریسک سیستمی سطح خرد مانند  $CoVaR$  و MES است و اثرات اقتصاد کلان ریسک سیستمی را در کل سیستم بانکی اندازه می‌گیرد.

تفاوت اندازه‌های  $CoVaR$  و MES در جمله شرطی موجود در تعریف اندازه‌ها است. MES به بازده یک نهاد در زمانی که سیستم مالی دچار آشفتگی و رکورد شده است نگاه دارد در حالیکه  $CoVaR$  در مقابل، به بازده سیستم مالی در زمانی که یک نهاد دچار آشفتگی شده و در رکود قرار گرفته است نگاه دارد. این اختلاف به علت ویژگی‌های ذاتی اندازه‌ها نیست بلکه به علت کاربردی است که آنها دارند. در حقیقت، از هر دو اندازه می‌توان در تحلیل‌ها بهره جست. در حالتی که  $CoVaR$  متناظر  $Var$  یک نهاد باشد به شرطی که سیستم مالی در استرس قرار گرفته است، می‌توان آن را متناظر با تعریف MES مدنظر قرار داد.

## اندازه‌های ریسک سیستمی

بنویت و همکاران [۱] در سال ۲۰۱۳ به معرفی و مقایسه مقیاس‌های مهم اندازه‌گیری ریسک سیستمی ( $MES$ ,  $SES$ ,  $SRISK$  و  $CoVaR$ ) پرداختند. در این بخش از تعاریف بنویت و همکاران به منظور معرفی اندازه‌های ریسک سیستمی استفاده می‌کنیم. این اندازه ریسک‌ها دارای تفسیر اقتصادی خوبی هستند. اول،  $MES$  متناظر با زیان مورد انتظار بنگاه موقعی است که بازار در یک افق زمانی داده شده به زیر یک آستانه معین سقوط کند. برای مثال، در مورد  $MES$  کوتاه مدت، بازار ۲٪ در یک روز سقوط کند و یا ۴۰٪ در شش ماه برای  $MES$  بلند مدت. ایده اولیه این اندازه این است که بانک‌ها با بالاترین  $MES$  بیشترین سهم را در سقوط بازار دارند، بنابراین این بانک‌ها بزرگترین محرک‌های ریسک سیستمی هستند. دوم،  $SES$  و  $SRISK$  زیان مورد انتظار یک نهاد را به شرطی که بحران مالی اتفاق افتاده باشد اندازه می‌گیرند. سوم اینکه اندازه  $CoVaR$  متناظر است با ارزش در معرض خطر ( $Var$ ) سیستم مالی به شرط اینکه یک نهاد در معرض خطر یا بحران باشد. سهم یک نهاد در ریسک سیستمی با  $\Delta CoVaR$  محاسبه می‌شود که تفاضل بین  $CoVaR$  دو موقعیت شرکت در زمانی است که در بحران مالی باشد یا نباشد.

## روش‌شناسی

### تعاریف

در این بخش تعاریف مرسوم هر یک از اندازه ریسک‌های ذکر شده بیان خواهد شد.  $N$  نهاد را در نظر بگیرید و فرض کنید  $r_{it}$  نشان دهنده بازده نهاد  $i$ ام در زمان  $t$  باشد. بازده بازار به صورت میانگین موزون بازده تمام نهادها خواهد بود،  $r_{mt} = \sum_{i=1}^N w_{it} r_{it}$  به طوری که  $w_{it}$  ارزش بازار نسبی بنگاه  $i$  را نشان می‌دهد.

### $SES$ و $MES$

$MES$  سهم حاشیه‌ای نهاد  $i$  در ریسک سیستمی است که با زیان مورد انتظار ( $ES$ ) سیستم اندازه گرفته می‌شود. این اندازه ابتدا در سال ۲۰۱۰ توسط آچاریا [۲] پیشنهاد شد.  $MES$  در سال ۲۰۱۲ توسط براونلس و آنگل [۳] به صورت شرطی تعمیم داده شده است. با توجه به تعریف،  $ES$  با سطح  $\alpha\%$  بازده مورد انتظار در بدترین  $\alpha\%$  تمام حالت‌ها است، اما می‌توان آن را به صورت عمومی تعمیم داد به طوری که بازده از یک آستانه  $C$  داده شده تجاوز کند. در کل، نمایش ریاضی  $ES$  به صورت زیر است:

$$ES_{mt}(C) = \mathbb{E}_{t-1}(r_{mt} | r_{mt} < C) = \sum_{i=1}^N w_{it} \mathbb{E}_{t-1}(r_{it} | r_{mt} < C)$$

آنگاه،  $MES$  مشتق جزئی  $ES$  سیستم نسبت به وزن نهاد  $i$  در سیستم مالی است:

$$MES_{it}(C) = \frac{\partial ES_{mt}(C)}{\partial w_{it}} = \mathbb{E}_{t-1}(r_{it} | r_{mt} < C)$$

$MES$  افزایش ریسک سیستم (اندازه گرفته شده با  $ES$ ) را با افزایش حاشیه‌ای وزن نهاد  $i$  در سیستم اندازه می‌گیرد. شرکت با  $MES$  بالاتر سهم بیشتری در افزایش ریسک سیستمی دارد.

یک توسیع از  $MES$  زیان مورد انتظار سیستمی ( $SES$ ) است.  $SES$  متناظر با تعداد سهام بانک‌هایی است که در موقع بحران زیر یک سطح هدف (تعریف شده با کسری  $k$  از دارایی‌ها) سقوط می‌کنند؛ زمانی که سرمایه کل کمتر از  $k$  برابر دارایی کل باشد:

$$\frac{SES_{it}}{W_{it}} = kL_{it} - 1 - \mathbb{E}_{t-1}(r_{it} | \sum_{i=1}^N W_{it} < k \sum_{i=1}^N A_{it})$$

که  $L_{it}$  اهرم  $(A_{it}/W_{it})$ ،  $A_{it}$  دارایی کل و  $W_{it}$  ارزش کل بازار یا ارزش بازار حقوق صاحبان سهام است. آچاریا نشان داد که جمله مقدار مورد انتظار شرطی می‌تواند به صورت تابع خطی از  $MES$  بیان شود:

$$SES_{it} = (kL_{it} - 1 + \theta MES_{it} + \Delta_i)W_{it}$$

که  $\theta$  و  $\Delta_i$  مقادیر ثابتی هستند.

## SRISK

اندازه  $SRISK$  در سال ۲۰۱۲ توسط آچاریا، آنجل و ریچاردسون [۴] پیشنهاد شد و براونلس و آنجل در سال ۲۰۱۲،  $MES$  را به منظور لحاظ کردن بدهی‌ها و اندازه نهاد مالی بسط دادند.  $SRISK$  متناظر است با زیان مورد انتظار یک نهاد مالی داده شده، به شرطی که بحران تمام سیستم مالی را تحت تأثیر قرار داده باشد. از این منظر، نهادهای با بیشترین کمبود سرمایه در زمره تأثیرگذارترین نهادها در بحران قرار می‌گیرند. با توجه به تعریف آچاریا، آنجل و ریچاردسون،  $SRISK$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$SRISK_{it} = \max [0; \underbrace{k(D_{it} + (1 - LRMES_{it})W_{it})}_{\text{سرمایه مورد نیاز}} - \underbrace{(1 - LRMES_{it})W_{it}}_{\text{سرمایه در دسترس}}]$$

که  $k$  نسبت سرمایه احتیاطی و  $D_{it}$  ارزش اسمی بدهی کل است. باید توجه داشت که اگر اهرم  $L_{it} = (D_{it} + W_{it})/W_{it}$  را تعریف کنیم، اندازه  $SRISK$  به صورت زیر در خواهد آمد:

$$SRISK_{it} = \max [0; [kL_{it} - 1 + (1 - k)LRMES_{it}]W_{it}]$$

توجه کنید که  $SRISK$  با اهرم افزایش می‌یابد. با این تعریف دیده شد که معادلات بیان شده برای محاسبه  $SRISK$  و  $SES$  تقریباً یکسان هستند.

$SRISK$  همچنین ارتباط نهاد با سایر نهادهای موجود در سیستم را از طریق زیان مورد انتظار حاشیه‌ای ( $LRMES$ ) در نظر می‌گیرد.  $LRMES$  متناظر است با افت مورد انتظار ارزش سهام نهاد در زمانی است که بازار در یک بازه شش ماهه از یک آستانه‌ای بیشتر سقوط کرده باشد.

### $\Delta CoVaR$

آخرین اندازه ریسک سیستمی  $\Delta CoVaR$  است که در سال ۲۰۱۱ توسط آدریان و برونر میر پیشنهاد شد. این اندازه بر پایه مفهوم ارزش در معرض خطر  $Var(\alpha)$  است که بیشینه زیان در بازه اطمینان  $\alpha\%$  می‌باشد.  $CoVaR$  متناظر است با ارزش در معرض خطر بازده بازار به شرطی که پیشامد  $\mathbb{C}(r_{it})$  برای نهاد  $i$  مشاهده شده باشد.

$$\Pr(r_{mt} \leq CoVaR_t^{m|\mathbb{C}(r_{it})} | \mathbb{C}(r_{it})) = \alpha$$

$\Delta CoVaR$  نهاد  $i$  به صورت تفاضل میان  $Var$  سیستم مالی به شرطی که این نهاد در وضعیت بحرانی باشد و  $Var$  سیستم مالی به شرطی که نهاد  $i$  در حالت عادی (میانه) باشد تعریف می‌شود. تعاریف متعددی را برای  $\mathbb{C}(r_{it})$  به منظور تعریف وضعیت بحرانی نهاد مالی می‌توان در نظر گرفت. از آنجاییکه آچاریا و همکارانش از رهیافت رگرسیون چندکی در محاسبات استفاده کردند، حالت بحرانی را دقیقاً برابر  $Var$  در نظر گرفتند:

$$\Delta CoVaR_{it}(\alpha) = CoVaR_t^{m|r_{it}=VaR_{it}(\alpha)} - CoVaR_t^{m|r_{it}=Median(r_{it})}$$

یک رهیافت دیگر برای تعریف وضعیت بحرانی نهاد  $i$  را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\Delta CoVaR_{it}(\alpha) = CoVaR_t^{m|r_{it} \leq VaR_{it}(\alpha)} - CoVaR_t^{m|r_{it}=Median(r_{it})}$$

### اندازه‌های ریسک در چارچوب مدل گارچ

فرض کنید بازده کل سیستم و بازده نهادها از فرآیند  $GARCH$  پیروی کنند:

$$r_t = H_t^{1/2} v_t$$

که  $r_t = (r_{mt}, r_{it})'$  نشانگر بردار بازده بازار و شرکت باشد و بردار تصادفی  $v_t = (\varepsilon_{mt}, \xi_{it})'$  مستقل و هم توزیع با  $\mathbb{E}(v_t' v_t) = I_2$  و  $\mathbb{E}(v_t) = 0$  است. ماتریس  $H_t$  ماتریس واریانس-کواریانس شرطی به صورت زیر است:

$$H_t = \begin{pmatrix} \sigma_{mt}^2 & \sigma_{it} \sigma_{mt} \rho_{it} \\ \sigma_{it} \sigma_{mt} \rho_{it} & \sigma_{it}^2 \end{pmatrix}$$

که  $\sigma_{mt}$  و  $\sigma_{it}$  انحراف معیارهای شرطی و  $\rho_{it}$  همبستگی شرطی می باشند. هیچ فرض خاصی روی توزیع توأم عامل ابداع استاندارد شده  $v_t$  که نامعلوم فرض شده اعمال نشده است. تنها فرض می شود که همبستگی شرطی وابسته به زمان  $\rho_{it}$  به طور کامل وابستگی بازده های بازار و شرکت را نشان می دهد. این فرض دلالت بر این دارد که  $\varepsilon_{mt}, \xi_{it}$  دارای توزیع مستقل در زمان  $t$  هستند.

## MES

با در نظر گرفتن مدل فوق برای بازده بازار و شرکت ها، MES به صورت تابعی از نوسان و همبستگی آن با بازده بازار و همسویی دُم توزیع بیان می شود:

$$MES_{it}(C) = \sigma_{it} \rho_{it} \mathbb{E}_{t-1} \left( \varepsilon_{mt} \middle| \varepsilon_{mt} < \frac{C}{\sigma_{mt}} \right) + \sigma_{it} \sqrt{1 - \rho_{it}^2} \mathbb{E}_{t-1} \left( \xi_{it} \middle| \varepsilon_{mt} < \frac{C}{\sigma_{mt}} \right)$$

MES به عنوان تابعی موزون شده امید دُموار پسماندهای استاندارد شده بازار و امید دُموار پسماندهای استاندارد شده شرکت بیان می شود. از آنجاییکه وابستگی بازده بازار و شرکت به طور کامل با همبستگی بین آنها بیان می شود، جمله شرطی  $\mathbb{E}_{t-1} \left( \xi_{it} \middle| \varepsilon_{mt} < \frac{C}{\sigma_{mt}} \right)$  صفر خواهد شد. به منظور تسهیل در مقایسه با  $\Delta CoVaR$ ، آستانه  $C$  به عنوان ارزش در معرض خطر شرطی بازده بازار در نظر گرفته می شود، که به صورت زیر تعریف می گردد:  $\Pr[r_{mt} < VaR_{mt}(\alpha) | \mathcal{F}_t] = \alpha$  که  $\mathcal{F}_t$  اطلاعات در دسترس تا زمان  $t$  را نشان می دهد.

قضیه ۱: MES یک نهاد مالی داده شده  $\alpha$ ، نسبتی از ریسک سیستماتیک آن است، که با بتای متغیر زمان اندازه گیری می شود. ضریب نسبت زیان مورد انتظار بازار است:

$$MES_{it}(\alpha) = \beta_{it} ES_{mt}(\alpha)$$

که  $ES_{mt}(\alpha) = \mathbb{E}_{t-1}(r_{mt} | r_{mt} < \beta_{it} = \frac{cov(r_{it}, r_{mt})}{var(r_{mt})} = \rho_{it} \sigma_{it} / \sigma_{mt}$  بتای متغیر زمان نهاد  $i$  را نشان می‌دهد و  $Var_{mt}(\alpha)$  زیان موردانتظار بازار است.

## SRISK

همانطور که در بخش قبل ذکر شد، SRISK تابعی از MES است. به عنوان نتیجه‌ای از قضیه ۱، SRISK را می‌توان به عنوان تابعی از بتا، اهرم و ارزش بازار نهاد مالی بیان کرد:

$$SRISK_{it} \cong \max [0; [kL_{it} - 1 + (1 - k) \exp(18 \times \beta_{it} \times ES_{mt}(\alpha))] W_{it}]$$

SRISK تابعی صعودی از ریسک سیستمی است.

## $\Delta CoVaR$

با فرض اینکه بازده از مدل گارچ پیروی کند، می‌توان  $\Delta CoVaR$  را برای شرط  $\mathbb{C}(r_{it}): r_{it} = VaR_{it}(\alpha)$  به عنوان تابعی از همبستگی شرطی، نوسان‌ها و VaR بیان کرد.

قضیه ۲:  $\Delta CoVaR$  یک نهاد مالی داده شده  $i$  نسبتی از ریسک دُموار آن است که با VaR متناظرش اندازه گرفته می‌شود. ضریب نسبت متناظر ضریب خطی تصویر بازده بازار بر بازده شرکت است:

$$\Delta CoVaR_{it}(\alpha) = \gamma_{it} [VaR_{it}(\alpha) - VaR_{it}(0.5)]$$

که  $\gamma_{it} = \rho_{it} \sigma_{mt} / \sigma_{it}$ . اگر توزیع حاشیه‌ای بازده حول صفر متقارن باشد،  $\Delta CoVaR$  اکیداً نسبتی از VaR است:

$$\Delta CoVaR_{it}(\alpha) = \gamma_{it} VaR_{it}(\alpha)$$

## کاربرد اندازه‌ها در عمل

تا این قسمت از گزارش به معرفی شاخصه‌های اندازه‌گیری ریسک سیستمی پرداخته شد. در ادامه خلاصه‌ای از دو پژوهش صورت گرفته در زمینه اندازه‌گیری ریسک کل سیستم با استفاده از اندازه‌های معرفی شده آمده است. در این کارهای پژوهشی ضمن استفاده

از اندازه ریسک‌ها از مدل‌های مختلفی برای دینامیک بازده استفاده شده است. در هر کدام از کارها تعریف اندازه ریسک توسعه داده شده و روش اندازه‌گیری هر کدام مختصر بیان گردیده است.

## مورد اول:

مدل رایج شرکت‌های واسطه مالی در قرض گرفتن کوتاه مدت، قرض دادن بلندمدت، نگهداری وام تا سررسید، مؤسسات مالی را نسبت به ریسک‌های اعتباری و نقدینگی حساس می‌کند. به علاوه، تکیه بیش از حد بر تأمین مالی عمده کوتاه مدت، ریسک‌های یک شرکت را با سایر شرکت‌ها بهم مربوط می‌سازد و باعث بوجود آمدن منبع منحصر از عدم اطمینان‌ها در صنایع مالی می‌شود که به ریسک سیستمی معروف می‌باشند. اگرچه مدیران بانک می‌توانند با پیاده‌سازی راهبردهای مختلف منابع ناهمگون عدم اطمینان را کنترل کنند، اما بهترین راه برای کنترل یک ریسک منفرد<sup>۹</sup> ممکن است باعث ایجاد ریسک سیستمی شود. برای مثال، اهرم‌زدایی تشدیدکننده سفارشات معاملات<sup>۱۰</sup>، یک ابزار کارا برای کم کردن محدودیت تأمین مالی فردی است، اما باعث پدیده سرایت مالی می‌شود. به طور مشابه، قطع ناگهانی اعتبارات کوتاه مدت، ریسک اعتباری مؤسسات وام‌دهنده را کاهش می‌دهد، اما این عمل ریسک تأمین مالی را به نهادهای وام‌گیرنده منتقل می‌کند. حتی نگهداری یک سبد از سهام که با شیوه‌های مدیریت ریسک تنوع‌بخشی شده است، به علت وجود زیان‌های محتمل همبسته در سفارشات بنگاه‌هایی که در بازارهای تأمین مالی به یکدیگر وابسته هستند باعث ایجاد ریسک سیستمی می‌شود.

بعد از بحران مالی جهانی اخیر، کمیته بازل مجموعه‌ای از نوآوری‌های نظارتی را به منظور رواج بیشتر بخش‌های بانکی معرفی کرد. چارچوب بازل ۳ در پی افزایش ضربه‌گیر<sup>۱۱</sup> سرمایه و جذب شوک‌های نقدینگی با ساخت ظرفیت‌های موازنه است.

اندازه‌های پایداری و کارایی در حقیقت جزء سیاست‌های محتاطانه خرد هستند و تضمینی برای انتقال ریسک بین شرکت‌کنندگان بازار که به صورت کامل به اهداف محتاطانه کلان نرسیده‌اند، نمی‌باشند. کمیته بازل به منظور نشان دادن ریسک سیستمی اندازه‌های مکملی در سال ۲۰۱۱ در روش شناسایی ریسک سیستمی معرفی کرد [۵]. این روش شناسایی شامل پنج دسته است: اندازه، ارتباط، جایگزینی، فعالیت برون مرزی و پیچیدگی بانک.

<sup>9</sup> Individual risk

<sup>10</sup> Pro-cyclical deleveraging of the trading book

<sup>11</sup> Buffer

اسپینوزا و همکاران [۶] در سال ۲۰۱۳ با نشان دادن اینکه چگونه عامل‌های ریسک سیستمی ذکر شده در روش‌شناسی بازل در ریسک ناتوانی مالی<sup>۱۲</sup> فردی مشارکت دارند و ریسک سیستمی را در صنعت بانکداری جهانی گسترش می‌دهد، جهت پر کردن شکاف بین سیاست‌های محتاطانه خرد و کلان گام برداشته‌اند. یافته‌های تجربی که در این کار حاصل شده است به صورت زیر می‌باشد:

اول، از میان پنج دسته ریسک سیستمی، ریسک تأمین مالی<sup>۱۳</sup> که با نسبت تأمین مالی عمده کوتاه مدت بر دارایی اندازه‌گیری می‌شود، عامل اصلی ریسک سیستمی تشخیص داده شد. یک واحد افزایش در انحراف معیار این متغیر منجر به افزایش ریسک سیستمی بازده دارایی‌ها می‌شود.

دوم، تعامل مدل تجاری با فعالیت برون مرزی منبع اصلی ریسک سیستمی است. با نشان دادن مدل تجاری با نسبت سود بر درآمد خالص و عملیات برون مرزی با نسبت دارایی‌های ارزی بر کل دارایی‌ها یافت شد که یک واحد افزایش در انحراف معیار جمله مشترک این متغیرها منجر به افزایش ریسک سیستمی متناظر با بازده دارایی می‌شود.

سوم، در رده بانک‌های بزرگ بین‌المللی، اختلاف‌ها برخواسته از اندازه هستند، که با دارایی کل، یا نسبت رشد تولید داخلی، یا جایگزینی؛ که با وزن سیستم پرداخت نشان داده می‌شود و با نسبت سپرده‌ها بر سپرده کل بانک‌های کشور مربوط اندازه‌گیری می‌شود، به نظر نقش فزاینده‌ای در پخش ریسک سیستمی ندارند.

چهارم، مدیریت نقدینگی در سطح متوسط متناظر با ریسک سیستمی پایین‌تر است. نقدینگی متمرکز یک نهاد مستقل با نسبت صدور اوراق بدهی منتشره، ابزارهای بازار پول توسط بانک‌های سایه، بر تمام اوراق بدهی منتشر شده نمایش داده شده است. یک واحد افزایش در انحراف معیار نسبت نقدینگی متمرکز متناظر با کاهش ریسک سیستمی می‌شود. این نتیجه مزایای تنوع‌بخشی حاصل از تخصیص مجدد نقدینگی در نهادهای وابسته را در شرایط بحرانی مالی برجسته می‌سازد.

پنجم، ریسک ناتوانی مالی با نسبت سود بر درآمد خالص کم می‌شود. این نتیجه با نقش بازارهای مالی در گسترش ریسک فردی سازگار است. به طور مشابه، زمانی که مدیریت نقدینگی در یک سطح فرعی تمرکز زدایی می‌شود، احتمال نکول فردی کاهش می‌یابد. تنها عاملی که هر دو ریسک سیستمی و فردی را تولید می‌کند، نسبت تسهیلات به سپرده است. یک واحد افزایش در این متغیر دامنگ تاخت نکول اعتباری را افزایش می‌دهد و احتمال نکول آن را زیاد می‌کند.

---

<sup>12</sup> Solvency risk

<sup>13</sup> Funding risk

در سال ۲۰۱۱ آدریان و برونمیر [۷] اندازه ای برای ریسک نامطلوب شرطی بین یک سبد فردی با سبد دیگر پیشنهاد کردند. سبد دوم می‌تواند یک سبد فردی دیگر یا کل سیستم مالی باشد. به موازات تعریف ارزش در معرض خطر (VaR) اندازه ریسک CoVaR به صورت بیشینه زیان مورد انتظار در یک سبد معین برای یک سطح اطمینان و افق زمانی داده شده است. به صورت واضح‌تر، برای یک بانک و کل سیستم،  $\lambda \times 100\%$  CoVaR سیستم S با  $\lambda \times 100\%$  VaR داده شده بانک i، به صورت  $CoVaR_{\lambda,t}^{S|i}$  نمایش داده شده و به صورت چندک  $\lambda$  تابع زیان شرطی تعریف می‌شود:

$$\Pr(X_t^S \leq CoVaR_{\lambda,t}^{S|i} | X_t^i = VaR_{\lambda,t}^i) = \lambda$$

که  $X_t^i$  و  $X_t^S$  به ترتیب بازده‌های کل سیستم مالی و بانک فردی را نمایش می‌دهند و  $VaR_{\lambda,t}^i$  ارزش در معرض خطر بانک i برای یک سطح احتمال دلخواه  $0 < \lambda < 1$  است.

لوپز اسپینوزا و همکاران [۶] اندازه سهم حاشیه‌ای یک بنگاه بر سیستم را به صورت  $\Delta CoVaR_{\lambda,t}^{j|i}$  تعریف کردند. این اندازه به صورت مقدار نموی CoVaR با شرط اینکه بنگاه در شرایط ریسک باشد نسبت به CoVaR با شرط اینکه بنگاه در شرایط متوسط یا نرمال باشد، تعریف می‌شود. شرایط بحران و نرمال به ترتیب با  $\lambda \times 100\%$  و  $\lambda \times 50\%$  VaR بنگاه در نظر گرفته می‌شود. به طور کل، سهم ریسک بانک در کل سیستم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta CoVaR_{\lambda,t}^{j|i} = CoVaR_{\lambda,t}^{S|X^i=VaR_{\lambda,t}^i} - CoVaR_{\lambda,t}^{S|X^i=Median^i}$$

### سبدهای فردی

برای هر بانک بازده‌های هفتگی سبد تشکیل شده از ارزش بازاری دارایی کل بنگاه محاسبه شده است. به منظور برآورد ارزش بازاری دارایی کل، نسبت ارزش بازار به ارزش دفتری سرمایه به ارزش اسمی دارایی کل بانک اضافه شده است.

### سبد سیستم

برای هر بانک، یک سبد سیستم متفاوت حاصل از میانگین موزون بازده‌های بانک‌های باقی‌مانده در نمونه ساخته می‌شود. یعنی بازده سبد سیستم مؤسسه i مانند زیر توصیف می‌شود:

$$X_t^{S,i} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \omega_{t,j} X_t^j, \quad \omega_{t,j} = W_t^j (\sum_{j=1, j \neq i}^n W_t^j)^{-1}$$

که  $X_t^j$  به بازده ساده مؤسسه  $\lambda$  و  $W_t^j$  متغیر اکیداً مثبت استفاده شده برای وزن‌دهی است؛ به طوریکه  $\omega_{t,j}$  بین صفر و یک می‌باشد. دلیل استفاده از این رهیافت در زیر آمده است:

اول اینکه هر کدام از شاخص‌های حاصل شده سبدي از بانک‌های بزرگ است و سبد سیستمی را نمایش می‌دهند. این مسئله ما را قادر می‌سازد تا چگونگی پخش شوک در بانک بحران‌زده، در این دسته خاص را مشاهده کنیم. دوم حذف بانکی از ترکیب خطی که باعث می‌شود سبد سیستمی آن به گونه‌ای باشد که سیستم مرجع برای هر بانک با شاخص تشکیل شده از سایر بانک‌های باقیمانده در نمونه شکل بگیرد مشخص شود. این رویه یک تعدیل نمونه خرد را تضمین می‌کند و از اثر همبستگی مکانیکی در موقعی که تعداد کل نهادها ( $n$ ) در نمونه بزرگ نیست و یا زمانی که یک نهاد وزن معناداری در کل سیستم داشته باشد جلوگیری می‌کند. در نهایت، از مقدار دارای وقفه متغیر دارایی کل به منظور متغیر وزن‌دهی استفاده می‌شود.

### برآورد VaR یک بانک و یک سیستم

محاسبه  $CoVaR$  نیاز به برآورد مقدار  $VaR$  برای هر بانک و برای هر سیستم از بانک‌ها دارد. اگرچه می‌توان  $VaR$  را با روش‌های مختلفی برآورد کرد، اما در اینجا از روش رگرسیون چندکی استفاده شده است. زیرا این روش در قلب مدل  $CoVaR$  نهفته است.

فرض کنید  $Z_t = (1, X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{nt})'$  یک بردار از متغیرهای حالت باشد. مدل رگرسیون چندکی به صورت زیر است:

$$X_t^i = Z_{t-1}'\beta + u_{\lambda,t}; \quad t = 2, \dots, T$$

در چندک‌های  $\lambda = \{0.05, 0.50\}$  با متغیر وابسته بازده بانک  $\lambda$  و جمله خطای  $u_{\lambda,t}$  که در محدودیت  $Q(u_{\lambda,t}|Z_{t-1}) = 0$  صدق می‌کند.  $Q(\cdot)$  تابع چندکی شرطی است. انتخاب ۵٪ در احتمال رکود متناظر با تجربه‌های مدیریت ریسک بوده و همچنین تعادل مناسبی را بین مشخص کردن مقادیر با احتمال رخداد بزرگ در دُم چپ توزیع زیان و دشواری‌های آماری مربوط به شناسایی پارامتر را زمانی که تابع هدف نزدیک محدودیت‌های مرزی در رگرسیون چندکی است، برقرار می‌کند. چندک ۵۰٪ با توجه به معادله محاسبه  $\Delta CoVaR_{\lambda,t}^{ji}$  انتخاب شده است. این انتخاب ما را در مشخص کردن دینامیک چندک شرطی  $X_t^i$  بدون اعمال هرگونه محدودیتی روی توزیع داده کمک می‌کند. این رویه به برآورد سازگار از بردار  $\beta_\lambda$  تحت شرایط نرمال می‌انجامد که می‌توان

$$VaR_{\lambda,t} = \hat{\beta}_\lambda Z_{t-1} \text{ را با توجه به آن محاسبه کرد: } \Delta CoVaR_{\lambda,t}^{ji}$$

### محاسبه $CoVaR_{\lambda,t}^{S|i}$ و $\Delta CoVaR_{\lambda,t}^i$

گام مهم در روش محاسبه CoVaR برآورد اندازه تغییرات مشترک شرطی است. با استفاده از رگرسیون چندکی بازده سیستم روی بازده همزمان بانک آام و بعد از کنترل مجموعه متغیرهای حالت بحث شده در قبل، برای مثال،  $X_t^{S,i} = Z'_{t-1}\beta_\lambda + \delta_\lambda X_t^i + u_{\lambda,t}$  می‌توان این اندازه تغییرات را اندازه گرفت.

از آنجاییکه CoVaR مخصوصاً برای اندازه گیری ریسک رکود به کار برده می‌شود، در مدلسازی آن باید احتیاط کرد. به خصوص، ضرایب برآورد شده اثر بازده یک بانک بر کل سیستم میانگین پاسخ چندک شرطی توزیع بازده سبد به توزیع کل بازده بانک را نشان می‌دهد. از آنجا که تحلیل‌های ما بیشتر بروی رفتار دُم چپ توزیع متمرکز است، به همین علت مقادیر VaR منفی خواهد بود. مدل ذکر شده قبل را به صورت مدل نامتقارن زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$X_t^{S,i} = Z'_{t-1}\beta_\lambda + \delta_{\lambda,i}^- X_{t-1}^i I_{(X_{t-1}^i < 0)} + \delta_{\lambda,i}^+ X_{t-1}^i I_{(X_{t-1}^i \geq 0)} + u_{\lambda,t}$$

که  $I(\cdot)$  تابع مشخصه است. از آنجاییکه بسیاری از بانک‌های موجود در نمونه در پاسخ به بحران مالی مجبور به اتخاذ سیاست فرآیند تأمین سرمایه مجدد شدند، از متغیرهایی برای بیان تفاضل‌های احتمالی پاسخ‌ها و عدم پایداری پارامتر در هنگام مواجهه با بحران مالی و فرآیند تأمین سرمایه مجدد استفاده کرده‌ایم.

$$X_t^{S,i} = Z'_{t-1}\beta_\lambda + \delta_{\lambda,i}^- X_{t-1}^i I_{(X_{t-1}^i < 0)} + \delta_{\lambda,i}^+ X_{t-1}^i I_{(X_{t-1}^i \geq 0)} + \xi_{\lambda,i} X_{t-1}^i I_{(X_{t-1}^i < 0, Crisis)} + \tau_{\lambda,i} X_{t-1}^i I_{(X_{t-1}^i < 0, Re)} + u_{\lambda,t}$$

که  $I_{(X_{t-1}^i < 0, Re)}$  و  $I_{(X_{t-1}^i < 0, Crisis)}$  به ترتیب برای بازده‌های منفی مشاهده شده در دوره بحران و بعد از فرآیند تأمین سرمایه مجدد مقادیر ۱ می‌گیرند. با برآورد پارامترهای موجود در معادله فوق می‌توان اثر هر بانک را بر کل سیستم اندازه گرفت. در کل، با داشتن مقادیر برآورد شده تابع CoVaR به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$CoVaR_{\lambda,t}^{S|X^i=VaR_{\lambda,t}^i} = Z'_{t-1}\hat{\beta}_\lambda + VaR_{\lambda,t}^i [\hat{\delta}_{\lambda,i}^- X_{t-1}^i I_{(VaR_{\lambda,t}^i < 0)} + \hat{\delta}_{\lambda,i}^+ X_{t-1}^i I_{(VaR_{\lambda,t}^i \geq 0)} + \hat{\xi}_{\lambda,i} X_{t-1}^i I_{(VaR_{\lambda,t}^i < 0, Crisis)} + \hat{\tau}_{\lambda,i} X_{t-1}^i I_{(VaR_{\lambda,t}^i < 0, Re)}]$$

برای هر  $0 < \lambda < 1$  و به طور خاص در  $\lambda = 0.05$  داریم:

$$\Delta CoVaR_{0.05,t}^{S|i} = CoVaR_{0.05,t}^{S|X^i=VaR_{0.05,t}^i} - CoVaR_{0.5,t}^{S|X^i=VaR_{0.5,t}^i}$$

## مورد دوم:

گیرالدی و ارگون [۱۴]، تعریف CoVaR پیشنهاد شده توسط آدریان و برونر میر تعمیم داده شده به طوریکه فرض شده است شرط پیشامد بحران مالی به جای اینکه بازده نهاد  $j$  دقیقاً در  $VaR(R^j = VaR^j)$  قرار گیرد به بازده نهاد  $j$  که حداکثر در  $VaR(R^j \leq VaR^j)$  قرار گرفته باشد برگردد. این تغییر ما را قادر می‌سازد رویدادهای بحرانی بیشتری از نهاد  $j$  که در قسمت‌های انتهایی دم قرار دارند را ببینیم.

## روشناسی

فرض کنید بازده‌های  $R_t^i$  یک نهاد یا یک سبد  $i$  و سطح اطمینان  $q$  داده شده باشند.  $VaR_{q,t}^i$  به صورت چندک  $q$  توزیع بازده‌ها تعریف می‌شود:

$$\Pr(R_t^i \leq VaR_{q,t}^i) = q$$

برای مثال اگر  $q$  برابر  $0.5$  باشد،  $VaR_{0.05,t}^i$  چندک پنجم توزیع بازده است. آدریان و برونر میر  $CoVaR_{q,t}^{ij}$  را به صورت VaR یک نهاد (یا سبد)  $i$  به شرطی که نهاد دیگر (یا سبد)  $j$  در رکود مالی باشد؛ یعنی بازده آن در VaR متناظرش باشد.  $CoVaR_{q,t}^{ij}$  به صورت ضمنی با چندک  $q$  توزیع شرطی تعریف می‌شود:

$$\Pr(R_t^i \leq CoVaR_{q,t}^{ij} | R_t^j = VaR_{q,t}^j) = q$$

به منظور برآورد متغیر با زمان  $VaR_{q,t}^i$  و  $CoVaR_{q,t}^{ij}$ ، آدریان و برونر میر به ترتیب از رگرسیون چندکی  $q$ ،  $R_t^j$  روی مجموعه‌ای از متغیرهای حالت با وقفه و  $R_t^i$  روی  $R_t^j$  و مجموعه مشابهی از متغیرهای حالت با وقفه استفاده کردند. بعد از انجام این رگرسیون‌ها،  $VaR_{q,t}^j = a + bM_{t-1}$  و  $CoVaR_{q,t}^{ij} = c + d VaR_{q,t}^j + e M_{t-1}$  به دست آمدند که  $M$  بردار متغیرهای حالت و  $a, b, c, d, e$  تابع‌هایی از ضرایب برآورد شده از رگرسیون چندکی هستند. بنابراین حتی اگر همبستگی بین  $i$  و  $j$  در طول زمان تغییر کند، اثر VaR بر CoVaR با ضریب برآورده شده  $d$  داده می‌شود که همواره ثابت است. زمانی که CoVaR با استفاده از مدل

گارج برآورد می‌شود، رابطه سری زمانی بین CoVaR نهاد و VaR آن به علت همبستگی زمانی، با زمان تغییر می‌کند. این ویژگی ما را قادر می‌سازد تا به آسانی تغییر همبستگی بین  $j$  و  $i$  را مشاهده کنیم.

## تعریف CoVaR

در این پژوهش، تعریف به کار رفته توسط آدریان و برونر میر برای CoVaR اصلاح گردیده است. پیشامد بحرانی که در اینجا با جمله‌ای شرطی برای نهاد  $j$  در نظر گرفته شده است، حداکثر VaR در نظر گرفته شده است. بنابراین  $CoVaR_{q,t}^{i|j}$  چندک  $q$  توزیع شرطی زیر است:

$$\Pr(R_t^i \leq CoVaR_{q,t}^{i|j} | R_t^j \leq VaR_{q,t}^j) = q$$

شرط  $R_t^j \leq VaR_{q,t}^j$  به منزله در نظر گرفتن موارد بیشتر از آشفته‌گی‌های مالی نهاد  $j$  است که ممکن زیان بیشتر را نیز در بر بگیرد، یعنی آنهایی که فراتر از  $VaR_{q,t}^j$  هستند. دلیل دیگر برای این تغییر در تعریف آسان کردن آزمون عقبگرد CoVaR است. با تغییر در تعریف معادله فوق، برآوردهای CoVaR می‌توانند مشابه برآوردهای VaR مورد ارزیابی قرار گیرند.

## $\Delta CoVaR$ و سهم ریسک سیستمی

$CoVaR_{q,t}^{i|j}$  را که  $i \equiv s$  یک سیستم مالی یا سیدی از تمام نهادهای مالی است را در نظر می‌گیریم و شرط را روی رویداد بحران در نهاد  $j$  می‌گذاریم. بنابراین  $CoVaR_{q,t}^{s|j}$ ، VaR سیستم مالی به شرطی که نهاد  $j$  دچار بحران شده باشد است. سهم ریسک سیستمی یک نهاد خاص مانند  $j$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta CoVaR_{q,t}^{s|j} = 100 \times (CoVaR_{q,t}^{s|j} - CoVaR_{q,t}^{s|b^j}) / CoVaR_{q,t}^{s|b^j}$$

که درصد اختلاف VaR سیستم مالی با شرط روی بحران نهاد  $j$ ،  $(R_t^j \leq VaR_{q,t}^j)$  و VaR سیستم مالی با شرط حالت معیار نهاد  $j$  است. حالت معیار  $b^j$  را انحراف معیار یک از میانگین در نظر می‌گیریم:  $\mu_t^j - \sigma_t^j \leq R_t^j \leq \mu_t^j + \sigma_t^j$  که  $\mu_t^j$  و  $\sigma_t^j$  به ترتیب میانگین شرطی و انحراف معیار نهاد  $j$  هستند.

## رویه سه مرحله‌ای

**مرحله اول:** ابتدا VaR متناظر با هر نهاد  $j$  با استفاده از مدل تک متغیره زیر برآورد می‌شود:

$$R_t^j = \mu_t^j + \varepsilon_{j,t}$$

که  $\mu_t^j = \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1}^j$  و  $\varepsilon_{j,t} = z_{j,t} \sigma_{j,t}$  با واریانس یک و میانگین صفر، هم توزیع و مستقل از هم هستند. واریانس شرطی دارای  $GARCH(1,1)$  به صورت زیر است:

$$\sigma_{j,t}^2 = \beta_0^j + \beta_1^j \varepsilon_{j,t-1}^2 + \beta_2^j \sigma_{j,t-1}^2$$

با فرض داشتن توزیع  $Z$  و چندک  $q$  توزیع شرطی برآورد شده، می‌توان در هر دوره  $Var$  هر نهاد را محاسبه کرد.

**مرحله دوم:** برای هر نهاد  $j$ ، مدل  $GARCH$  دو متغیره  $DCC$  برای بازده‌های نهاد  $j$  و سیستم مالی را برآورد می‌کنیم. فرض کنید

$$R_t = (R_t^s, R_t^j)'$$

باشد که دینامیک آن به صورت زیر داده شده باشد:

$$R_t = \mu_t + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t = \Sigma_t^{1/2} Z_t,$$

که  $\Sigma_t$  ماتریس کواریانس شرطی  $2$  در  $2$  از جملات خطای  $\varepsilon_t$  و  $\mu_t$  بردار  $2$  در  $1$  میانگین‌های شرطی است. بردار عامل ابداع

استاندارد شده  $Z_t = \Sigma_t^{-1/2} (R_t - \mu_t)$  مستقل و هم توزیع با  $E(Z_t) = 0$  و  $Var(Z_t) = I_2$  هستند.  $D_t$  را ماتریس

قطری  $2$  در  $2$  با درایه‌های قطری واریانس شرطی  $\sigma_{x,t}^2$  و  $\sigma_{y,t}^2$  به طوری که برای هر  $x, y = s, j$   $\{D_{xx}\}_t = \{\Sigma_{xx}\}_t$

و  $\{D_{yy}\}_t = \{\Sigma_{yy}\}_t$  و  $\{D_{xy}\}_t = 0$  می‌باشد. واریانس‌های شرطی به صورت  $GARCH(1,1)$  مدل می‌شوند:

$$\sigma_{x,t}^2 = \theta_0^x + \theta_1^x \varepsilon_{x,t-1}^2 + \theta_2^x \sigma_{x,t-1}^2,$$

$$\sigma_{y,t}^2 = \theta_0^y + \theta_1^y \varepsilon_{y,t-1}^2 + \theta_2^y \sigma_{y,t-1}^2,$$

و کوواریانس  $\sigma_{xy,t}$  به صورت زیر است

$$\sigma_{xy,t} = \rho_{xy,t} \sqrt{\sigma_{x,t}^2 \sigma_{y,t}^2}$$

فرض کنید  $C_t = D_t^{-1/2} \Sigma_t D_t^{-1/2} = \{\rho_{xy}\}_t$  ماتریس همبستگی‌های شرطی  $\varepsilon_t$  باشد.

$$C_t = \text{diag}(Q_t)^{-1/2} \times Q_t \times \text{diag}(Q_t)^{-1/2},$$

$$Q_t = (1 - \delta_1 - \delta_2) \bar{Q} + \delta_1 (u_{t-1} u'_{t-1}) + \delta_2 Q_{t-1}$$

که  $\bar{Q}$  ماتریس کوواریانس غیرشرطی  $\left\{ \frac{\varepsilon_{x,t}}{\sigma_{x,t}} \right\}_{x=s,j}$  است و  $u_t = \left\{ \frac{\varepsilon_{x,t}}{\sigma_{x,t}} \right\}_{x=s,j}$  است و  $\text{diag}(Q_t)$  ماتریس ۲،۲ با قطر  $Q_t$  است.

**مرحله سوم:** تابع چگالی توأم  $pdf_t(R_t^s, R_t^j)$  را برای هر  $R_t = (R_t^s, R_t^j)'$  در مرحله دوم برآورد می‌کنیم. در مرحله سوم

اندازه  $CoVaR_{q,t}^{slj}$  را برای هر نهاد مالی  $j$  در زمان  $t$  محاسبه خواهیم کرد. با تعریف داده شده از  $CoVaR$  داریم:

$$\Pr(R_t^s \leq CoVaR_{q,t}^{slj} | R_t^j \leq VaR_{q,t}^j) = q$$

$$\frac{\Pr(R_t^s \leq CoVaR_{q,t}^{slj}, R_t^j \leq VaR_{q,t}^j)}{\Pr(R_t^j \leq VaR_{q,t}^j)} = q.$$

با استفاده از تعریف  $\Pr(R_t^i \leq VaR_{q,t}^i) = q$ ،  $VaR_{q,t}^j$  خواهیم داشت:

$$\Pr(R_t^s \leq CoVaR_{q,t}^{slj}, R_t^j \leq VaR_{q,t}^j) = q^2$$

اگر قرار دهیم  $x, y = s, j$  با  $VaR_{q,t}^j$  برآورد شده از مرحله اول می‌توان  $CoVaR_{q,t}^{slj}$  را با حل عددی انتگرال دوگانه زیر

محاسبه کرد:

$$\int_{-\infty}^{CoVaR_{q,t}^{slj}} \int_{-\infty}^{VaR_{q,t}^j} pdf_t(x, y) dy dx = q^2$$

برای محاسبه  $CoVaR_{q,t}^{s|b^j}$  نیز مشابه همین سه مرحله را تکرار می‌کنیم با این تفاوت که جمله شرطی به جای  $R_t^j \leq VaR_{q,t}^j$  حالت معیار  $\mu_t^j - \sigma_t^j \leq R_t^j \leq \mu_t^j + \sigma_t^j$  است. احتمال حاشیه‌ای  $p_t^j = \Pr(\mu_t^j - \sigma_t^j \leq R_t^j \leq \mu_t^j + \sigma_t^j)$  را برای هر نهاد  $j$  محاسبه می‌کنیم و  $CoVaR_{q,t}^{s|b^j}$  با احتمال توأم زیر تعریف می‌شود.

$$\Pr(R_t^s \leq CoVaR_{q,t}^{s|j}, \mu_t^j - \sigma_t^j \leq R_t^j \leq \mu_t^j + \sigma_t^j) = p_t^j q$$

مشابه محاسبه  $CoVaR_{q,t}^{s|j}$ ،  $CoVaR_{q,t}^{s|b^j}$  با حل عددی انتگرال دوگانه زیر به دست خواهد آمد.

$$\int_{-\infty}^{CoVaR_{q,t}^{s|b^j}} \int_{\mu_t^j - \sigma_t^j}^{\mu_t^j + \sigma_t^j} pdf_t(x, y) dy dx = p_t^j q$$

## منابع:

١. Benoit, S., et al., *A theoretical and empirical comparison of systemic risk measures*. 2013.
٢. Acharya, V.V., et al., *Measuring systemic risk*. 2010.
٣. Brownlees, C.T. and R.F. Engle, *Volatility, correlation and tails for systemic risk measurement*. Available at SSRN 1611229, 2012.
٤. Acharya, V., R. Engle, and M. Richardson, *Capital shortfall: A new approach to ranking and regulating systemic risks*. *The American Economic Review*, 2012. **102**(3): p. 59-64.
٥. Committee, B., *Global systemically important banks: assessment methodology and the additional loss absorbency requirement*. 2011, Consultative Document July.
٦. López-Espinosa, G., et al., *Good for one, bad for all: Determinants of individual versus systemic risk*. *Journal of Financial Stability*, 2013. **٩**(٣): p. 287-299.
٧. Adrian, T. and M.K. Brunnermeier, *CoVaR*. 2011, National Bureau of Economic Research.
٨. Billio, M., et al., *Econometric measures of systemic risk in the finance and insurance sectors*. 2010, National Bureau of Economic Research.
٩. Zhou, C., *Are banks too big to fail? Measuring systemic importance of financial institutions*. *International Journal of Central Banking*, 2010. **6**(4): p. 205-250.
١٠. Huang, X., H. Zhou, and H. Zhu, *A framework for assessing the systemic risk of major financial institutions*. *Journal of Banking & Finance*, 2009. **33**(11): p. 2036-2049.
١١. Segoviano, M.A. and C.A.E. Goodhart, *Banking stability measures*. 2009: International Monetary Fund.
١٢. Bauwens, L. and S. Laurent, *A new class of multivariate skew densities, with application to generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models*. *Journal of Business & Economic Statistics*, 2005. **23**(3).
١٣. Allen, L., T.G. Bali, and Y. Tang, *Does systemic risk in the financial sector predict future economic downturns ?* *Review of Financial Studies*, 2012. **25**(10): p. 3000-3036.
١٤. Girardi, G. and A. Tolga Ergün, *Systemic risk measurement: Multivariate GARCH estimation of CoVaR*. *Journal of Banking & Finance*, 2013. **37**(8): p. 3169-3180.